Eine kurze Erläuterung zur Definition und Anwendung von Raumzeigern

Raumzeiger in ihrer Grundform sind auf die Behandlung von drei-Größen-Systemen zugeschnitten, in denen die Summe-Null-Bedingung $q_a + q_b + q_c = 0$ immer erfüllt ist. Die drei Größen sind damit durch nur zwei Größen eindeutig beschreibbar. Der Grundgedanke ist, die drei Größen q_a, q_b und q_c den Projektionen eines als komplexe Zahl in einer Ebene definierten sogenannten Raumzeigers auf drei in dieser Ebene gleichverteilt angeordnete Projektionsachsen a, b und c zuzuordnen (Bild 1). Damit ist die Rückgewinnung von q_a, q_b und q_c aus dem Raumzeiger definiert, die Gleichungen folgen weiter unten.

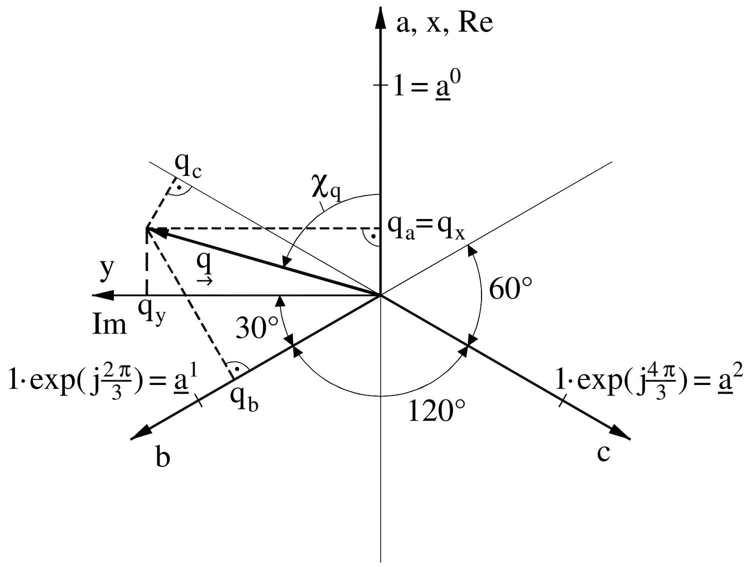

Bild 1: Komplexe Ebene mit drei gleichmäßig verteilten Projektionsachsen

Die komplexe Ebene wird durch die Achsen x und y (oft auch α und β genannt) aufgespannt, ein Raumzeiger darin beispielsweise durch seine Koordinaten q_x und q_y (die wegen des orthonormalen Koordinatensystems mit seinen Projektionen auf die Koordinatenachsen identisch sind) beschrieben. Selbstverständlich sind auch andere Darstellungsweisen, z. B. durch Betrag und Winkel, möglich. Ein Raumzeiger wird vorzugsweise durch Unterpfeilung gekennzeichnet: $\underset{\rightarrow}{q} = q_x + j\,q_y = |\underset{\rightarrow}{q}| \cdot \exp(j\,\chi_q)$.

Die drei Achsen a, b und c spannen ebenfalls die komplexe Ebene auf, sie bilden ein schiefwinkliges Koordinatensystem, in dem der Raumzeiger ebenfalls beschrieben werden kann. Mit den Richtungen der Achsen gemäß Bild 1 kann der Raumzeiger als

$$\underset{\rightarrow}{q} = (2/3) \cdot (1 \cdot q_a + \underline{a} \cdot q_b + \underline{a}^2 \cdot q_c) \tag{1}$$

geschrieben werden. Gemäß Bild 1 lassen sich nun die Größen q_a, q_b und q_c aus dem Raumzeiger $\underset{\rightarrow}{q}$ entsprechend

$$\begin{aligned} q_a &= \mathrm{Re}(\underset{\rightarrow}{q}) = q_x\,; \quad q_b = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(\underset{\rightarrow}{q}) + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{Im}(\underset{\rightarrow}{q}) = -\frac{1}{2} \cdot q_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot q_y \\ q_c &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(\underset{\rightarrow}{q}) - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{Im}(\underset{\rightarrow}{q}) = -\frac{1}{2} \cdot q_x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot q_y \end{aligned} \tag{2}$$

berechnen. Bevorzugt man anstelle der in Berechnungen sehr einfach und effektiv zu handhabenden komplexen Zahlen eine Darstellung mit Hilfe von Vektoren und Matrizen, so folgt

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & +\sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_a \\ q_b \\ q_c \end{bmatrix} \quad \text{sowie} \quad \begin{bmatrix} q_a \\ q_b \\ q_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & +\sqrt{3}/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Sollte die Eingangs genannte Summe-Null-Bedingung nicht erfüllt sein, so wird das dann vorhandene Nullsystem $q_{\text{III}} = (1/3) \cdot (q_a + q_b + q_c)$ durch die Berechnung des Raumzeigers automatisch eliminiert, beeinflußt den Raumzeiger also nicht. Im Bedarfsfalle ist es getrennt vom Raumzeiger zu behandeln. Natürlich läßt sich das Nullsystem in die Berechnungen mittels Vektoren und Matrizen integrieren, man erhält dann beispielsweise

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_{\text{III}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_a \\ q_b \\ q_c \end{bmatrix} \quad \text{sowie} \quad \begin{bmatrix} q_a \\ q_b \\ q_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 1 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_{\text{III}} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Die bisher vorgestellte Transformation in Raumzeiger entspricht den bekannten Scheitelwertzeigern für sinusförmig verlaufende Vorgänge. Eine normierte Version der Transformationen ist ebenfalls möglich, es ändern sich lediglich einige Faktoren. Leider verliert sich bei der normierten Darstellung die direkte anschauliche Deutung, bei der sich die Ursprungsgrößen durch Projektion des Raumzeigers auf die den Ursprungsgrößen zugeordneten Projektionsachsen ergeben. Das Nullsystem entzieht sich dieser Deutung ohnehin, es fügt sich nicht harmonisch in die Definitionen ein. Eine in dieser Hinsicht günstigere Lösung stellt die Transformation in sogenannte Hyperzeiger [1] dar.

Eine eventuell erforderlich Darstellung von Raumzeiger und Nullsystem in einem um die dem Nullsystem zugeordnete Achse rotierenden Koordinatensystem oder die Transformation von mit Raumzeigern geschriebenen Differentialgleichungen in ein so rotierendes Koordinatensystem ist problemlos möglich. Eine solche Transformation kann zwar in die Definitionsgleichungen integriert werden, es erscheint jedoch sofort merkwürdig, daß das Nullsystem prinzipiell nicht durch die Darstellung bzw. Transformation beeinflußt wird. Dies liegt daran, daß das Nullsystem sich eben nicht harmonisch in die Definition einfügt. Daher sollte eine solche Drehtransformation getrennt - und eben nur für Raumzeiger - erfolgen. Raumzeiger und Nullsystem in Vektoren zusammenzufassen verschleiert deren prinzipiellen Unterschied und sollte lediglich zur Vereinfachung der Darstellung oder der Berechnung z. B. mit Matrizen geschehen - und nur dann, wenn das Nullsystem wirklich benötigt wird.

Schlußfolgerung:

Sehr viele Probleme, z.B. im Bereich von Drehfeldmaschinen, können prinzipiell ohne Berücksichtigung eines eventuellen Nullsystems behandelt werden. In diesen Fällen ist der Raumzeiger in seiner Darstellung als komplexe Zahl allen anderen Transformationen vorzuziehen und sollte daher vorzugsweise verwendet werden.

[1] Depenbrock, M.; Staudt, V.: Hyper Space Vectors: A New Four-Quantity-Extension of Space Vector Theory. 4th Int. Workshop on Power Def. and Meas. under Nonsinusoidal Cond., Milano, 1997, pp.1-7